

EXERCICE 2 5 points

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = x e^{-x}$.

1. $f(x) = x e^{-x} = \frac{x}{e^x}$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$; donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

On en déduit que la courbe \mathcal{C}_f possède une asymptote en $+\infty$ d'équation $y = 0$; c'est l'axe des abscisses.

2. Pour tout réel x appartenant à $[0; +\infty[$: $f'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-1) e^{-x} = (1 - x) e^{-x}$.
3. Pour tout réel x , $e^{-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $(1 - x)$ sur $[0; +\infty[$.

On étudie le signe de $f'(x)$ sur $[0; +\infty[$.

x	0	1	$+\infty$
$1 - x$	+	0	-
e^{-x}	+		+
$f'(x)$	+	0	-

$$f(0) = 0; f(1) = e^{-1} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

On dresse le tableau de variations de f sur $[0; +\infty[$:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	e^{-1}	0

4. $e^{-1} \approx 0,369 > \frac{367}{1000}$

- Sur l'intervalle $[0; 1]$, la fonction f est continue et strictement croissante; elle va de 0 à $e^{-1} > 0,367$. Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0,367$ admet une solution unique sur cet intervalle.
- Sur l'intervalle $[1; +\infty[$, la fonction f est continue et strictement décroissante; elle va de $e^{-1} > 0,367$ à 0 . Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0,367$ admet une solution unique sur cet intervalle.

L'équation $f(x) = \frac{367}{1000}$ admet donc deux solutions sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

5. On admet que pour tout x appartenant à $[0; +\infty[: f''(x) = e^{-x}(x-2)$.

Pour étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$, on étudie le signe de $f''(x)$.

x	0	2	$+\infty$
$x-2$	-	0	+
e^{-x}	+		+
$f''(x)$	-	0	+
	f est concave		f est convexe

On peut même préciser que la courbe admet le point d'abscisse 2 comme point d'inflexion.

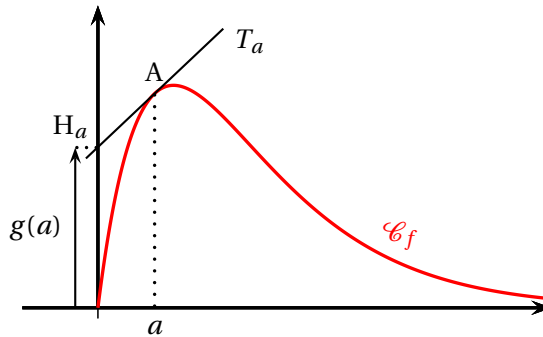
6. Soit a un réel appartenant à $[0; +\infty[$ et A le point de la courbe \mathcal{C}_f d'abscisse a .

On note T_a la tangente à \mathcal{C}_f en A .

On note H_a le point d'intersection de la droite T_a et de l'axe des ordonnées.

On note $g(a)$ l'ordonnée de H_a .

La situation est représentée sur la figure ci-contre.



- a. La tangente T_a a pour équation :

$$\begin{aligned}
 y = f'(a)(x-a) + f(a) &\iff y = (1-a)e^{-a}(x-a) + ae^{-a} \\
 &\iff y = [(1-a)e^{-a}]x - (1-a)e^{-a}a + ae^{-a} \\
 &\iff y = [(1-a)e^{-a}]x - ae^{-a} + a^2e^{-a} + ae^{-a} \\
 &\iff y = [(1-a)e^{-a}]x + a^2e^{-a}
 \end{aligned}$$

- b. $g(a)$ est l'ordonnée du point H_a de la tangente d'abscisse 0; donc

$$g(a) = [(1-a)e^{-a}] \times 0 + a^2e^{-a} = a^2e^{-a}.$$

- c. Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = x^2e^{-x}$.

$$g'(x) = 2x \times e^{-x} + x^2 \times (-1)e^{-x} = -x(x-2)e^{-x}$$

x	0		2		$+\infty$
$-x$	0	-		-	
$x-2$		-	0	+	
e^{-x}		+		+	
$g'(x)$		+	0	-	

D'après le tableau de signes de $g'(x)$, la fonction g est croissante puis décroissante; elle admet un maximum pour $x = 2$, ce qui correspond au point d'inflexion de la courbe \mathcal{C}_f .